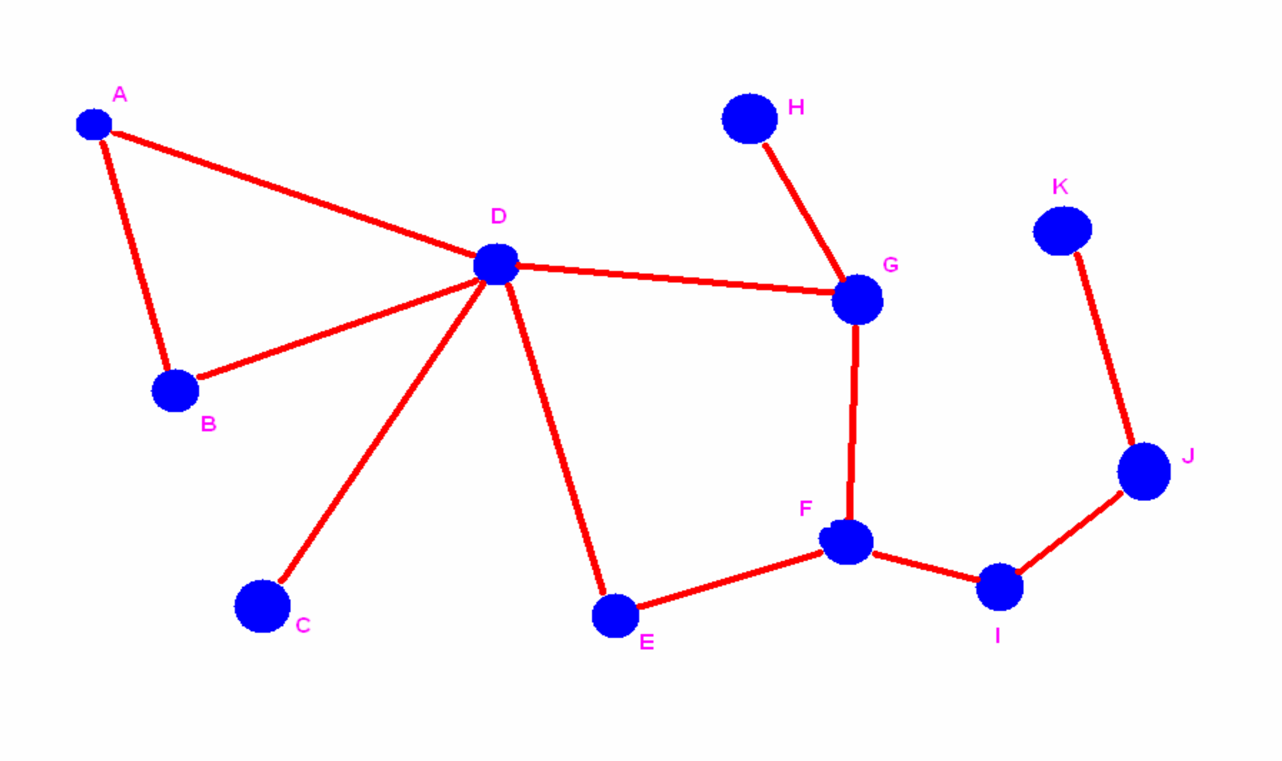
Cos'è un Grafo; concetti di base

Indice

Cos'è un Grafo; concetti di base

<u>G.0 Introduzione</u>:

Un *grafo* è un insieme di <u>punti</u> (*nodi del grafo*) connessi da <u>linee</u> (*archi del grafo*).



Nella figura precedente sono esempi di nodi i dischetti blu; i segmenti rossi identificano gli archi. Come possiamo vedere ogni nodo è identificato da una lettera. Gli archi possono essere identificati a loro volta utilizzando i simboli dei nodi che vengono connessi dall'arco.

Si noti che un *arco* è una entità caratterizzata da una direzione ben precisa (cioè è *vettoriale*); l'arco (A,B) è concettualmente distinto dall'arco inverso (B,A) che potrebbe anche non esistere affatto (nel caso di un grafo stradale si pensi p.es. ad un senso unico).

Il concetto di *grafo* è intrinsecamente *topologico*, in quanto devono essere rappresentate le *connessioni* esistenti tra nodi ed archi; già disponendo di un grafo di tipo topologico è perfettamente possibile utilizzarlo per tutte le funzioni p.es. di determinazione dei percorsi minimi.

Il senso reale del grafo è dunque quello di rappresentare *tutte le connessioni esistenti tra i diversi nodi*.

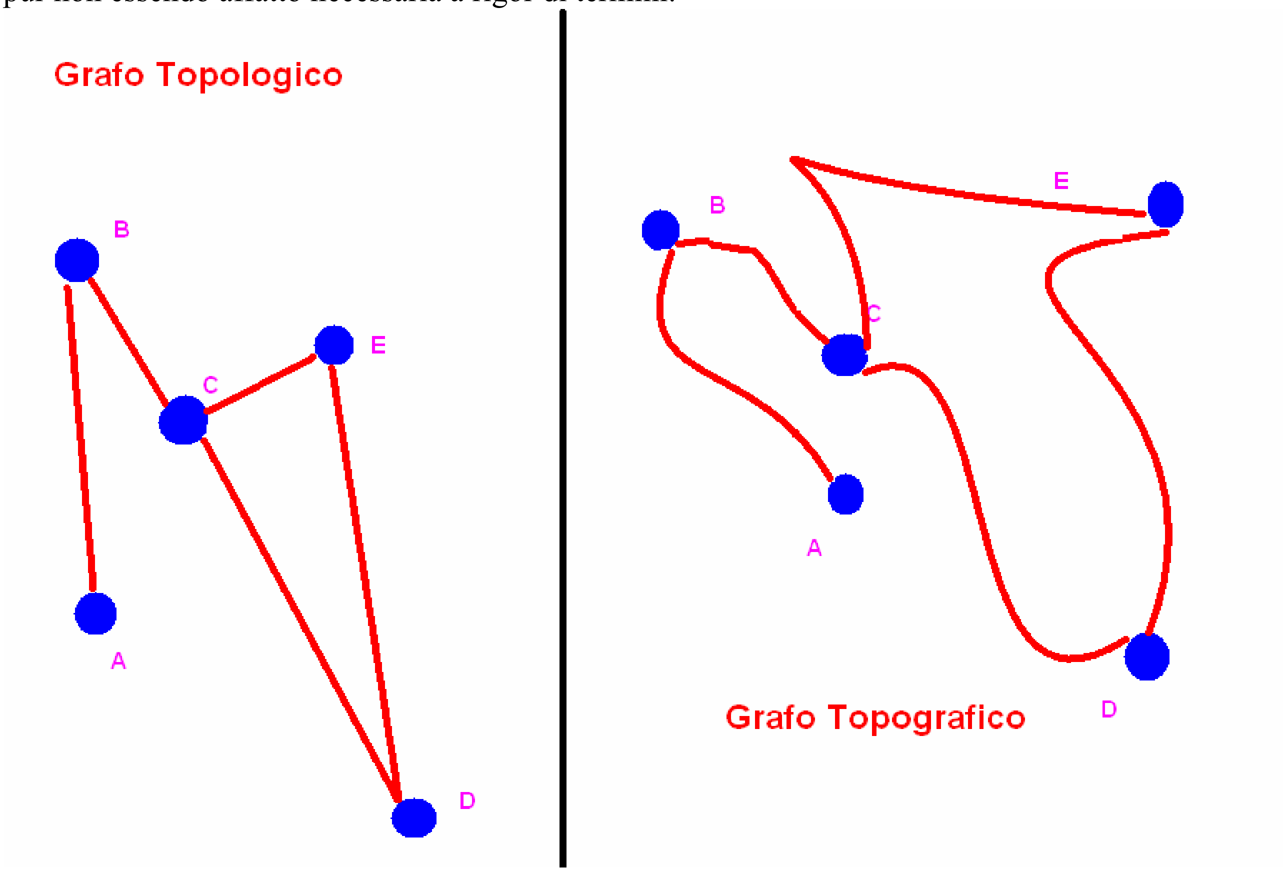
P.Es., riferendoci alla figura precedente, è del tutto intuitivo che per raggiungere il nodo E a partire dal nodo C occorrerà necessariamente attraversare il nodo D, dato che non esiste alcuna connessione diretta (C-E).

Potremmo seguire a scelta il percorso (C-D-E) come anche (C-D-G-F-E); in ogni caso riusciremmo a raggiungere E partendo da C.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A		x		x							
B	x			x							
C				x							
D	x	x	x		x		x				
E				x		x					
F					x		x		x		
G				x		x		x			
H							x				
I						x				x	
J									x		x
K										x	

Si noti che non è affatto necessario utilizzare una rappresentazione di *tipo grafico* per rappresentare adeguatamente un grafo, in quanto è perfettamente possibile descriverlo utilizzando una rappresentazione di *tipo tabellare*, come mostrato in figura.

Ciononostante la rappresentazione *topografica* del grafo (legata cioè al precisa rappresentazione in scala dei nodi e degli archi) rappresenta un ulteriore arricchimento del grafo, pur non essendo affatto necessaria a rigor di termini.

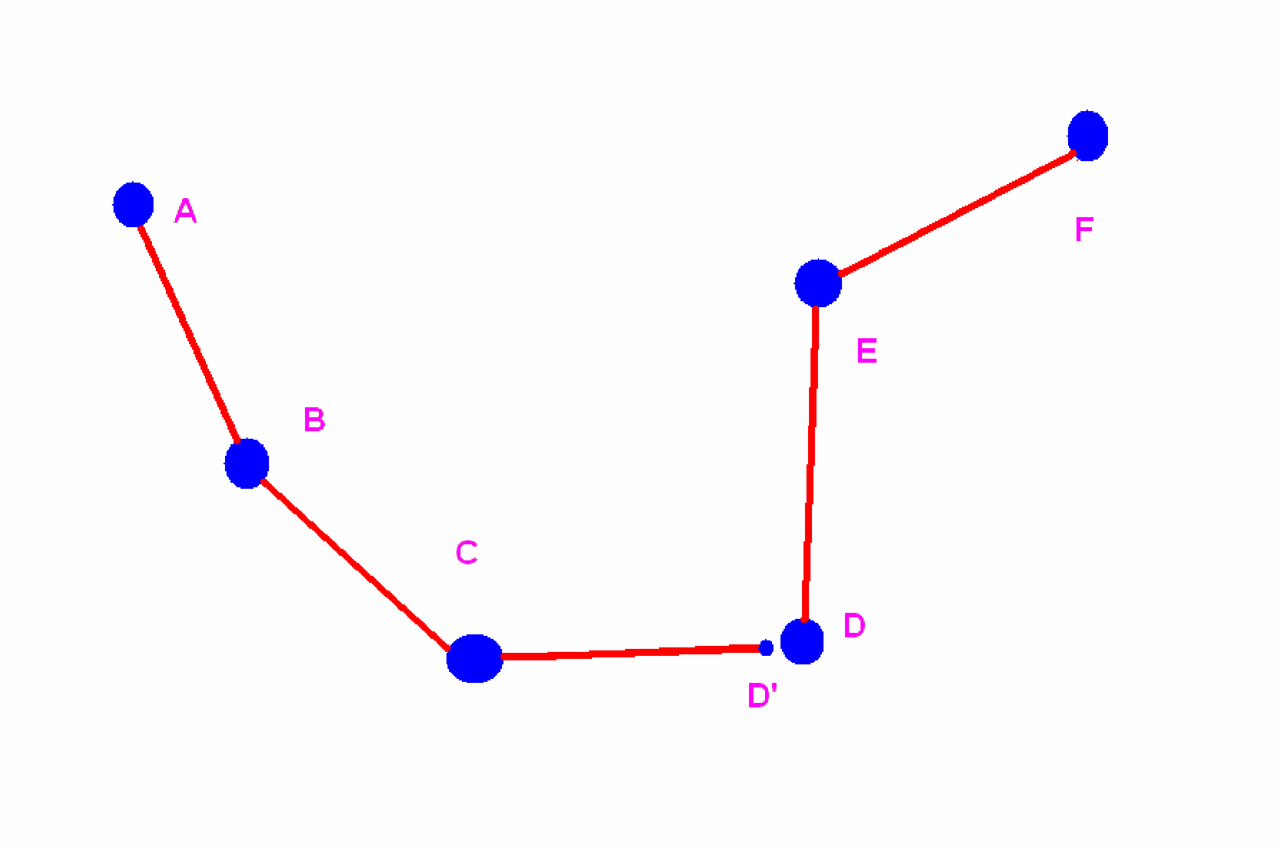


I due grafi mostrati in figura paiono profondamente differenti, almeno a prima vista; infatti le *rappresentazioni topografiche* sono assai differenti.

Tuttavia sono *perfettamente equivalenti* dal punto di vista *topologico*; se infatti non ci limitiamo a considerare la *forma* del grafo, ma consideriamo invece le *connessioni*, possiamo accorgerci che nulla cambia tra le due rappresentazioni alternative.

Resta il fatto che solamente il *grafo topografico* può essere utilizzato per ottenere una rappresentazione cartografica soddisfacente.

Nel caso in cui il grafo debba essere utilizzato sia a fini topologici che topografici assume un rilievo critico la questione della *rigorosa coerenza spaziale degli elementi*. Si consideri la figura seguente:

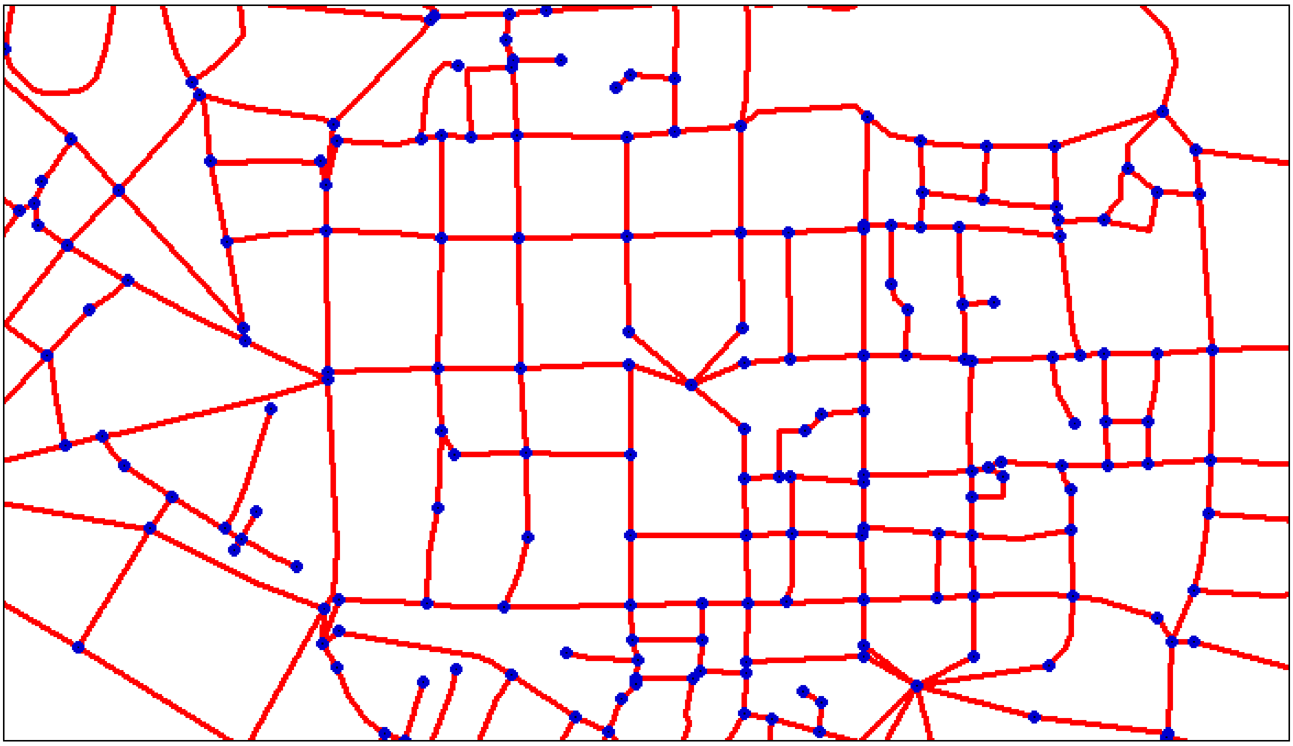


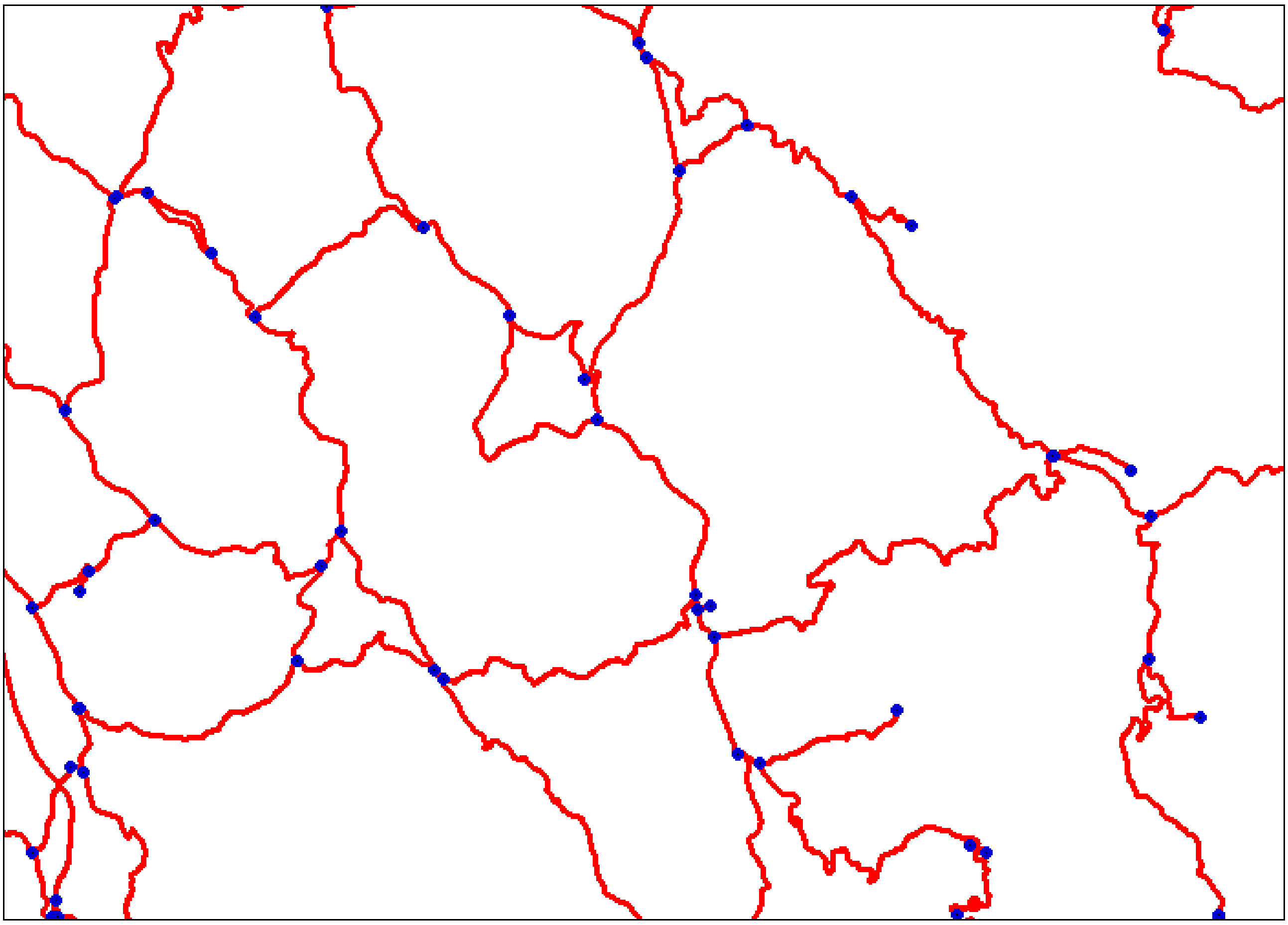
Dato che il nodo D’ è (seppur di poco) separato fisicamente dal nodo D, ne consegue che non esiste una connessione reale (C-D); risulterà quindi assolutamente impossibile raggiungere p.es. F a partire da A.

Di fatto un grafo come quello mostrato in figura non rappresenta una rete, ma piuttosto due reti fisicamente distinte; non risulterà quindi possibile “passare” da una rete all’altra.

Si noti che non ha alcuna importanza l’entità della differenza nelle coordinate di D’ e D; anche un solo millimetro di scarto è sufficiente a causare l’interruzione della continuità spaziale del grafo. Al contrario un grafo gode di *coerenza spaziale* quando tutti gli archi presentano le coordinate cartografiche dei punti iniziali esattamente coincidenti con le coordinate dei nodi iniziali e terminali.

Nel linguaggio “gergale” degli applicativi GIS quando è garantita la perfetta coerenza spaziale degli elementi di dice che si realizza una condizione di *snap*.


Questa figura rappresenta un tipico esempio di grafo stradale in ambito urbano.


Qui viene invece illustrato un tipico esempio di grafo stradale in ambito extra-urbano.

Come possiamo vedere dal confronto delle due figure precedenti, di norma i grafi in ambito urbano sono caratterizzati da un gran numero di archi; i singoli archi hanno usualmente una lunghezza limitata (decine o centinaia di metri); infine molti archi tendono ad avere una semplice tipologia rettilinea.

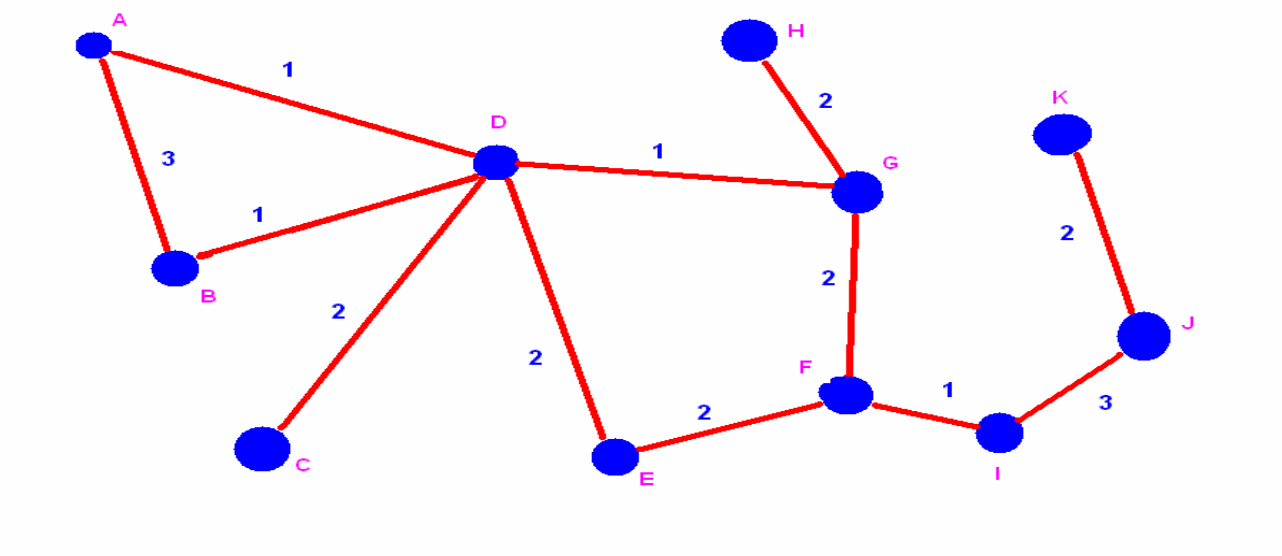
Al contrario nei contesti extra-urbani gli archi tendono ad essere meno numerosi; i singoli archi in generale sono molto più lunghi (chilometri) e con geometrie più complesse ed articolate (curve e controcurve).

In ogni caso i singoli *nodi* coincidono con il centro di un *incrocio* o di una *confluenza*; i singoli *archi* rappresentano invece un tratto di *asse stradale* che connette due incroci consecutivi.

Ne consegue che quasi mai una *strada* è rappresentata da un *singolo arco*; è di gran lunga prevalente il caso in cui la medesima strada si compone di *svariati archi*.

In questo esempio possiamo vedere quale sia la reale complessità del grafo stradale rispetto alla cartografia di sfondo; anche se l'area mostrata rappresenta pochi isolati, gli archi necessari per ottenere una rappresentazione fedele della rete stradale sono numerosi.

G.1 Percorsi minimi:



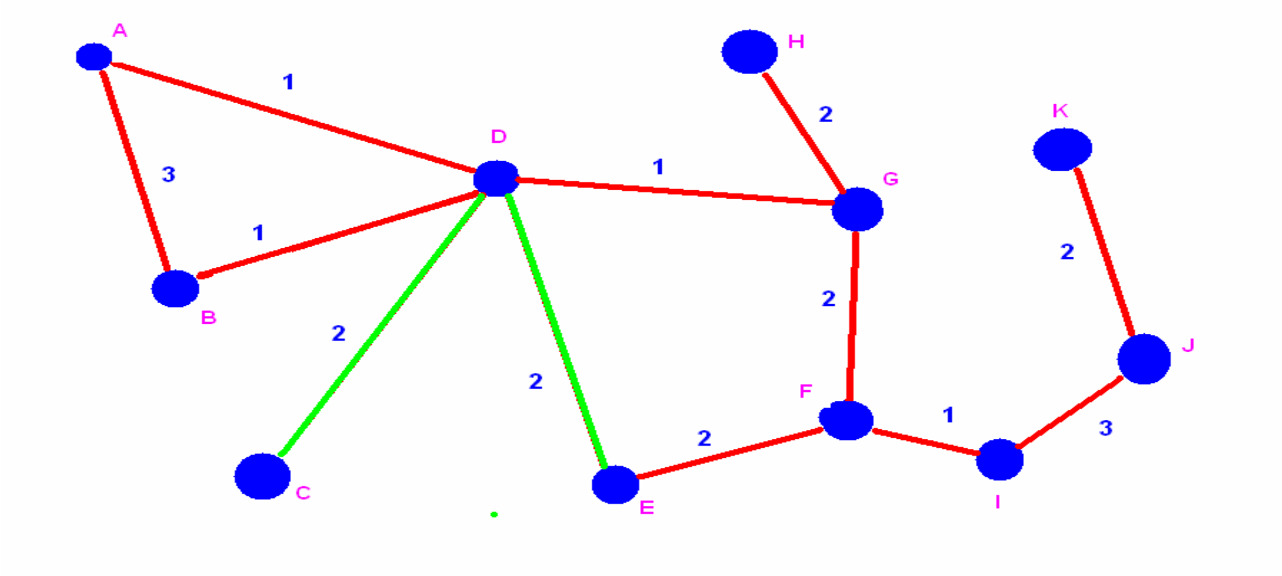
La figura mostra il medesimo grafo utilizzato all'inizio dell'esposizione dei concetti di base del *grafo stradale*. In questo caso però abbiamo associato ad ogni arco un parametro, cioè il *costo* dell'arco. Abbiamo cioè creato un *grafo pesato*.

Tanto per fissare le idee possiamo dire p.es. che in questo caso il *costo* dell'arco rappresenta la sua lunghezza in chilometri.

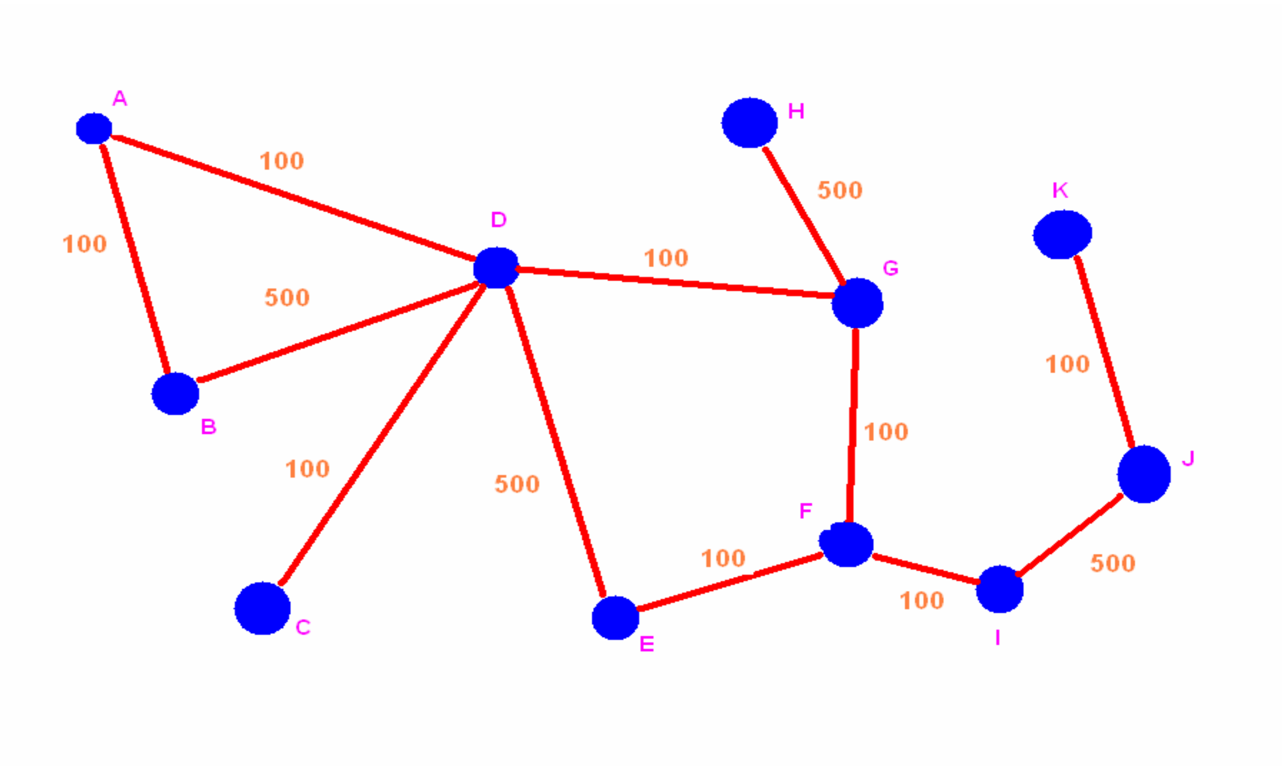
A questo punto possiamo utilizzare un apposito *algoritmo* (cioè una rigorosa procedura basata su criteri matematici rigorosamente verificati e dimostrati) per determinare il *percorso minimo* (cioè quello di *minor costo*) per raggiungere due nodi qualsiasi del grafo.

Dato che in questo esempio il *costo* coincide con la *distanza*, otterremo quindi il *percorso più breve*.

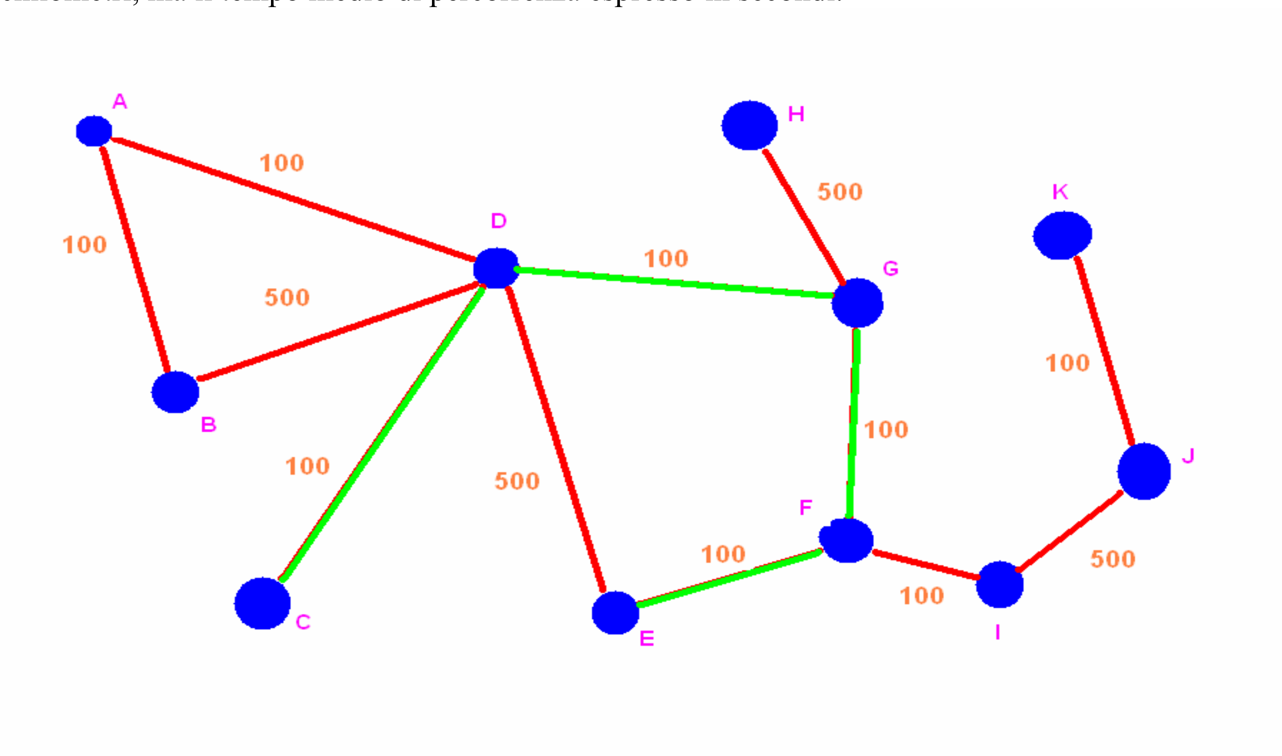
.



Come mostra la figura, il *percorso minimo* per raggiungere E partendo da C è (C-D-E); è facile verificare che nessun altro dei percorsi ammissibili ha un costo inferiore.



Nulla vieta però di assegnare pesi diversi agli archi, seguendo un qualche criterio alternativo; in questo caso abbiamo utilizzato come *costo* dell'arco non la sua lunghezza in chilometri, ma il tempo medio di percorrenza espresso in secondi.



Ed ecco come cambia il *percorso minimo*; in questo caso possiamo verificare come la connessione *più veloce* (anche se più lunga in termini di chilometri) per raggiungere E partendo da C sia (C-D-G-F-E).

Il fenomeno appena descritto non deve comunque generare alcuna perplessità; la considerazione che la strada *più breve* non sia necessariamente anche *la più veloce* e viceversa appartiene infatti alla comune esperienza quotidiana di ogni automobilista.